

Scienze Biomediche e della Prevenzione Sanitaria

FISICA – Lezione 8

Roberto Guerra

`roberto.guerra@unimi.it`

Dipartimento di Fisica
Università degli studi di Milano

Part IV

Fluidostatica (conclusione)

Il tubo di Torricelli

Un esperimento storicamente importante della legge di Stevino è il tubo di Torricelli (1608–1647).

È un tubo lungo 1 m, riempito di mercurio e rovesciato in un recipiente. Si osserva che il tubo non si svuota completamente, ma resta nel tubo per un'altezza

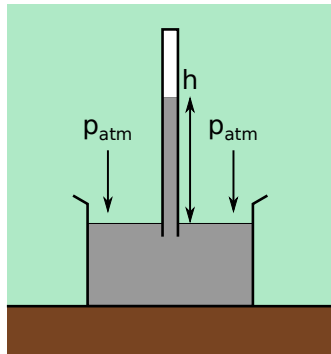
$$h \approx 760 \text{ mm.}$$



Il tubo di Torricelli

La colonna di mercurio all'interno del tubo non cade perché il mercurio nella bacinella è compresso verso il basso dall'atmosfera. Il peso del mercurio, con densità ρ , pareggia quindi la pressione atmosferica:

$$p_{\text{atm}} = \rho gh.$$



Il tubo di Torricelli

Dall'eguaglianza

$$p_{\text{atm}} = \rho gh,$$

sapendo che $\rho = 13.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, si ottiene

$$\begin{aligned} p_{\text{atm}} &= 13.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 10 \text{ m/s}^2 \times 0.76 \text{ m} = \\ &= 1.0 \times 10^5 \text{ Pa.} \end{aligned}$$

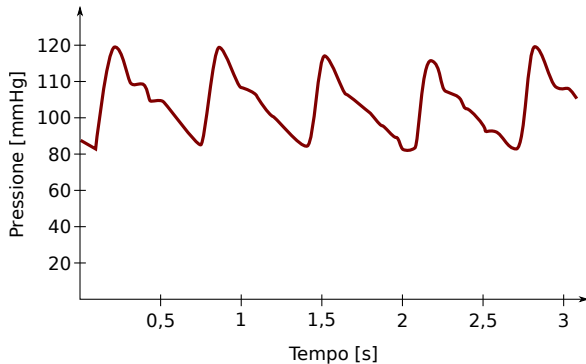
L'esperimento di Torricelli ha portato alla prima determinazione della pressione atmosferica.

Esercizio per casa

Se nel tubo di Torricelli si fosse usata acqua ($\rho = 1 \text{ kg/L}$) anziché mercurio, quanto sarebbe stata alta la colonna?

Misurazione della pressione arteriosa

La pressione del sangue varia nel tempo a seconda che il cuore sia in fase compressiva o di rilassamento:



Misurazione della pressione arteriosa

Convenzionalmente, la pressione sistolica (massima) e diastolica (minima) viene misurata in mmHg (a volte si usa anche “torr”, che è equivalente).

Questa però **non** è la pressione del sangue: è la differenza tra la pressione atmosferica e quella sanguigna. Il sangue è sempre a pressione più alta dell'atmosfera che ci circonda (com'è intuitivo).

Misurazione della pressione arteriosa



Misurazione della pressione arteriosa

Il manicotto va messo sopra il gomito perché in questo modo è alla stessa altezza del cuore.

Se l'altezza del cuore e del manicotto differissero di Δh , allora le pressioni nei due punti differirebbero di

$$\rho g \Delta h.$$

Ad esempio, per $\Delta h = 20 \text{ cm}$ si avrebbe un errore di $\sim 15 \text{ mmHg}$.

Il principio di Archimede

C'è un aspetto apparentemente banale dei fluidi che non abbiamo ancora caratterizzato.

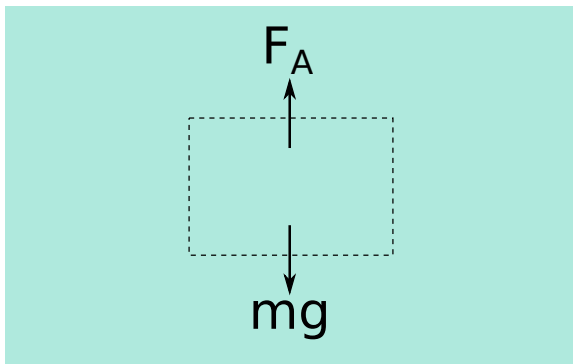
Quando un fluido è immobile, perché gli strati di fluido superiori non cadono verso il basso, a causa della gravità?

Il principio di Archimede

La risposta è ovviamente che il fluido circostante “sostiene” il volume considerato. Ma quali sono le caratteristiche della forza impressa?

È possibile dedurre la forma di questa forza con un semplice ragionamento.

Il principio di Archimede



Il principio di Archimede

“Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verso l’alto pari al peso del fluido spostato”.

La spinta verso l’alto è anche detta “spinta di Archimede”, ed è un effetto puramente gravitazionale.

Nel caso di un corpo immerso in un fluido, alla spinta di Archimede occorre ovviamente sommare la forza peso.

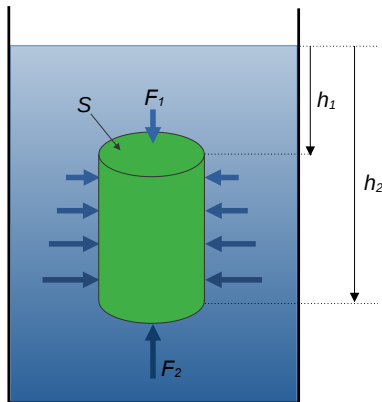
Il principio di Archimede

Esempi del principio di Archimede:

1. Navi;
2. Palloncini pieni d'elio;
3. Iceberg;
4. Galleggiamento in piscina/mare.

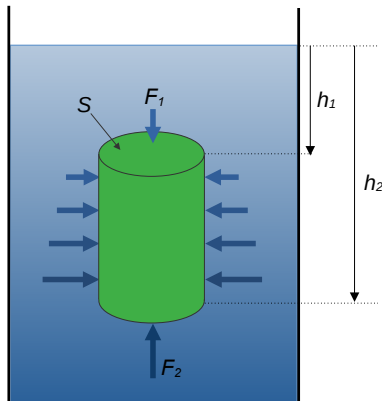
Il Principio di Archimede

La spinta di Archimede è dovuta al fatto che la pressione di un fluido cresce al crescere della profondità.



Il Principio di Archimede

La spinta di Archimede è dovuta al fatto che la pressione di un fluido cresce al crescere della profondità.



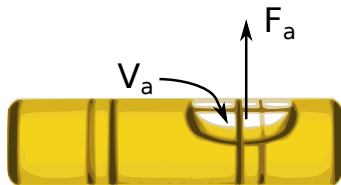
$$F_{tot} = P_2S - P_1S = (P_2 - P_1)S = \rho g(h_2 - h_1)S = \rho gV$$

Esempio: la livella

Un esempio del principio di Archimede è la livella, usata ad esempio dai muratori per fare pareti verticali e pavimenti orizzontali.



Esempio: la livella



La bolla d'aria all'interno della livella ha una densità ρ_a minore del liquido giallo (acqua colorata) ρ_l . Quindi la forza totale F ricevuta è

$$F = -mg + F_a = -\rho_a Vg + \rho_l Vg = (\rho_l - \rho_a)Vg > 0,$$

e la bolla accelera sempre verso l'alto.

Esempio: sovrapposizione di liquidi



Esercizi

Qual è la massa dell'aria ($\rho \approx 1.3 \text{ kg/m}^3$) contenuta in una stanza di $5 \text{ m} \times 5 \text{ m} \times 4 \text{ m}$. Prima di fare il calcolo, stimatene il valore!

Quanto pesa una porta di massello di quercia ($\rho \approx 10^3 \text{ kg/m}^3$) alta 200 cm, larga 75 cm e spessa 4 cm? Come al solito, provate prima a stimarne il valore.

Esercizi

- Qual è la forza esercitata dall'atmosfera su un tavolo di $80\text{ cm} \times 80\text{ cm}$?
- Il sangue scorre nell'aorta attraverso un'apertura circolare di raggio 0.9 cm . Se la pressione nel sangue è 120 mmHg , che forza esercita il cuore?

Esercizi

- Un'automobile esce di strada e affonda in un lago fino a toccare il fondo a una profondità di 10 m. Se l'area di una porta dell'automobile è 1 m^2 , qual è la forza esercitata sulla porta, supponendo che l'interno dell'automobile sia a pressione atmosferica? Cosa dovrebbe fare il guidatore per riuscire ad aprire la porta?

Esercizi

- Un blocco di materiale sconosciuto pesa 5 N in aria ($\rho \simeq 1.3 \text{ kg/m}^3$) e 4.5 N in acqua. Qual è la densità del materiale? [R: 10 kg/L]
- Supporre che la densità dell'aria sia 1.3 kg/m^3 , e che la densità dell'elio sia 0.2 kg/m^3 . Quale deve essere il volume di un pallone aerostatico riempito di elio per sollevare un peso di 2000 N? [R: circa 180 m^3]

Part V

Fluidodinamica

Fluidi in moto

Consideriamo ora un fluido in moto, ad esempio l'acqua che scorre in un ruscello.

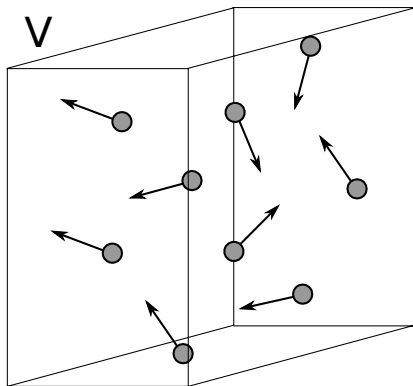
È intuitivo associare al fluido in moto una velocità, ma questa velocità come si rapporta agli spostamenti delle singole particelle?

Fluidi in moto

La velocità media con cui si muovono le molecole d'acqua in un bicchiere a temperatura ambiente è dell'ordine di $\sim 400 \div 500$ m/s ($\sim 1500 \div 1800$ km/h).

Nel caso dell'acqua in un ruscello, la corrente è ovviamente molto più lenta. Ma allora cosa si muove?

Fluidi in moto



Se potessimo osservare le singole molecole di un fluido, non saremmo in grado di capire se il fluido si sta muovendo o no!

Fluidi in moto

Ma se potessimo misurare le velocità v_i di ciascuna delle particelle del fluido e ne potessimo determinare la velocità media

$$v_{\text{media}} = \frac{\sum_{i=1}^N v_i}{N},$$

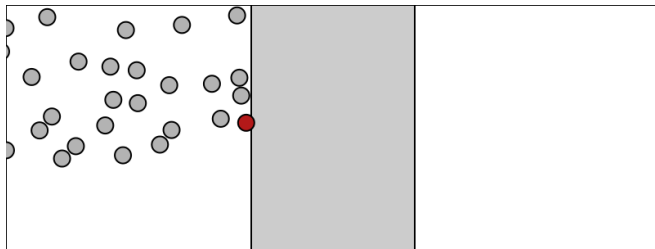
nel caso dell'acqua in un bicchiere otterremmo $v_{\text{media}} = 0$, mentre nel caso dell'acqua del ruscello otterremmo $v_{\text{media}} \neq 0$.

Velocità di un fluido

In fluidodinamica, con “velocità del fluido” si intende la velocità media delle sue particelle. Questa coincide con la velocità intuitiva che associamo alla corrente.

Come si usano le definizioni di “densità numerica” (n) e “densità di massa” (ρ) nel caso di un fluido in moto?

Densità di un fluido in moto



Particelle rosse = 1



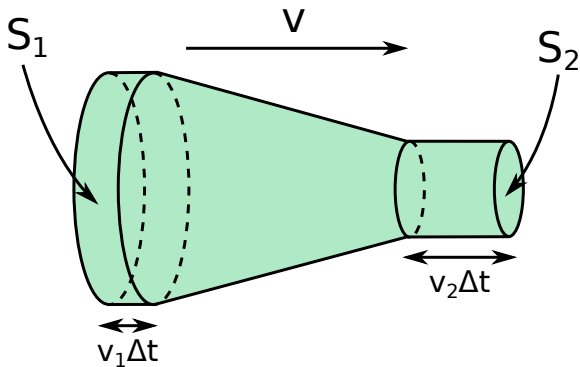
Densità di un fluido in moto

Come mostrato nell'animazione precedente, se un fluido è in moto stazionario (la velocità in un punto non cambia nel tempo) allora la sua densità numerica (e quindi di massa) è costante.

Questo vale anche se il fluido ha un'accelerazione (cascata, rubinetto...): l'importante è che in ciascuno dei punti dello spazio occupati dal fluido la velocità non cambi.

L'equazione di continuità

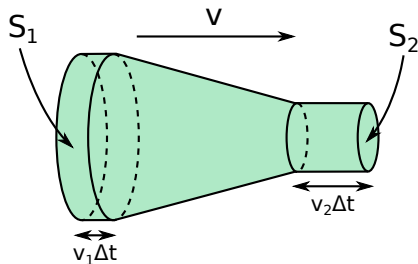
Consideriamo ora un fluido incompressibile (es., un liquido):



L'equazione di continuità

In un tempo Δt , nel tronco di cono entra un volume di fluido pari a quello del cilindro di sinistra (le particelle al suo interno si muovono verso destra):

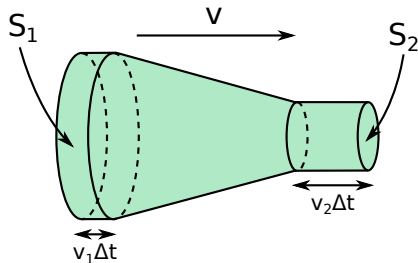
$$V_{\text{in}} = S_1 \times (v_1 \Delta t).$$



L'equazione di continuità

Perché il flusso sia costante occorre che un volume $V_{\text{out}} = V_{\text{in}}$ esca verso destra:

$$V_{\text{out}} = S_2 \times (v_2 \Delta t).$$



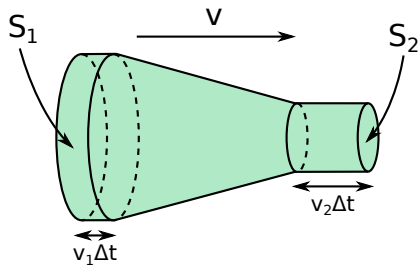
L'equazione di continuità

Il fluido quindi deve adattare v_2 in modo che i due volumi V_{in} e V_{out} siano uguali:

$$S_1 \times v_1 \times \Delta t = S_2 \times v_2 \times \Delta t,$$

da cui

$$S_1 \times v_1 = S_2 \times v_2.$$



L'equazione di continuità

La quantità

$$Q_V \equiv S \times v, \quad [Q] = \text{m}^3/\text{s}$$

è detta **portata in volume**, e in un fluido incompressibile che scorre in modo stazionario non cambia mai lungo il percorso. Essa dice quale volume di fluido passa nel tubo in un certo tempo.

Dalla costanza della portata, si deduce che un liquido in un tubo aumenta la sua velocità in corrispondenza di strozzature.

Esempio

In un'aorta di raggio 1.00 cm, il sangue scorre con la velocità di 30 cm/s. Qual è la portata in volume?

Iniziamo con l'assegnare dei simboli alle quantità numeriche:

$$r = 1 \text{ cm}, \quad v = 30 \text{ cm/s}.$$

Se l'aorta ha sezione circolare, la superficie trasversale è

$$S = \pi r^2.$$

Esempio

La portata dell'aorta è quindi

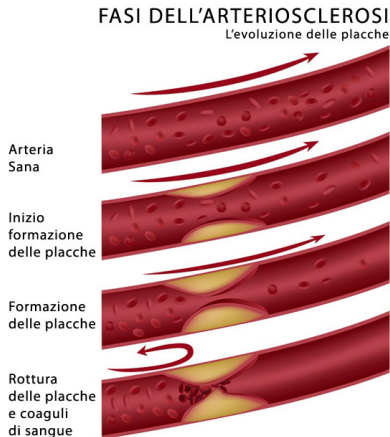
$$\begin{aligned}Q_V &= \pi r^2 \times v \simeq 3.14 \times (10^{-2} \text{ m})^2 \times 0.30 \text{ m/s} = \\&= 9.4 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}.\end{aligned}$$

Di solito, la portata del sangue è misurata in litri al minuto:

$$\begin{aligned}Q_V &= 9.4 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s} \times \frac{10^3 \text{ L}}{1 \text{ m}^3} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = \\&= 5.6 \text{ L/min}.\end{aligned}$$

Esempio

Il restringimento dei vasi sanguigni è pericoloso, perché se il sangue scorre troppo velocemente è facile la formazione di trombi.



Esempio

Il sangue scorre in un'arteria di 0.3 cm di raggio con velocità 10 cm/s verso una regione in cui il raggio si è ridotto a 0.2 cm a causa dell'arteriosclerosi. Qual è la velocità del sangue nella regione più stretta?

FASI DELL'ARTERIOSCLEROSI

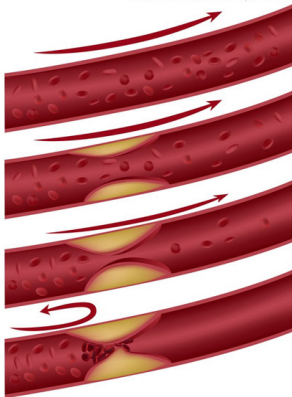
L'evoluzione delle placche

Arteria
Sana

Inizio
formazione
delle placche

Formazione
delle placche

Rottura
delle placche
e coaguli
di sangue



Esempio

Attribuiamo innanzitutto dei simboli:

$$r_1 = 0.3 \text{ cm},$$

$$v_1 = 10 \text{ cm/s},$$

$$r_2 = 0.2 \text{ cm},$$

$$v_2 = ?$$

Proviamo innanzitutto a prevedere più o meno quale sarà la velocità v_2 .

Esempio

Dalla relazione

$$v_1 \times \pi r_1^2 = v_2 \times \pi r_2^2$$

otteniamo che

$$v_2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 v_1 = \left(\frac{0.3 \text{ cm}}{0.2 \text{ cm}}\right)^2 \times 10 \text{ cm/s} \approx 22 \text{ cm/s}.$$

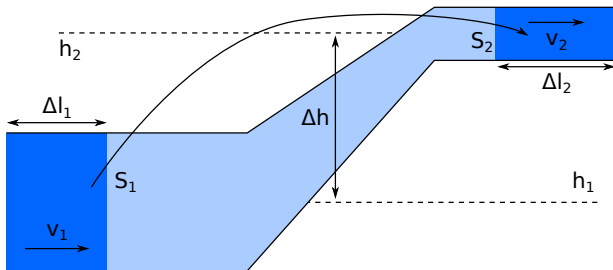
L'equazione di Bernoulli

Consideriamo ora l'effetto della forza di gravità su un fluido **incompressibile** che si muove in un tubo di altezza variabile.

A differenza dei casi precedenti, tratteremo il problema dal punto di vista energetico, usando il teorema dell'energia cinetica:

$$L_{\text{tot}} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2.$$

L'equazione di Bernoulli



L'equazione di Bernoulli

Per usare il teorema dell'energia cinetica, dobbiamo scrivere il lavoro totale compiuto nel processo. Questo è dovuto a tre forze:

1. La spinta del fluido che entra da sinistra, premendo in avanti il fluido davanti a sé (L_{sx});
2. La resistenza del fluido in alto a destra, che viene spinto fuori dall'immagine (L_{dx});
3. La variazione di altezza (energia potenziale gravitazionale, L_g).

L'equazione di Bernoulli

Se supponiamo che il fluido abbia densità ρ e che la parte che si sposta (colore blu) occupi un volume $V = S_1 \Delta l_1 = S_2 \Delta l_2$, allora

$$L_{sx} = F_{sx} \times \Delta l_1 = p_1 \times S_1 \times \Delta l_1 = p_1 \times V,$$

$$L_{dx} = -F_{dx} \times \Delta l_2 = -p_2 \times S_2 \times \Delta l_2 = -p_2 \times V,$$

$$L_g = -\rho V g (h_2 - h_1).$$

L'equazione di Bernoulli

Il teorema dell'energia cinetica porta quindi all'equazione

$$p_1 \times V - p_2 \times V - \rho Vg(h_2 - h_1) = \frac{1}{2}\rho Vv_2^2 - \frac{1}{2}\rho Vv_1^2$$

Siccome V compare in tutti i termini, possiamo semplificarlo.

Separando tra destra e sinistra le quantità relative alla posizione 1 rispetto a 2, si ottiene:

$$p_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

L'equazione di Bernoulli

L'equazione di Bernoulli dice che in un fluido incomprimibile la quantità

$$p + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2$$

si conserva. È diretta conseguenza della conservazione dell'energia.

Legge di Stevino ed equazione di Bernoulli

Notate che se si suppone che il fluido sia fermo ($v_1 = v_2 = 0$), l'equazione di Bernoulli

$$p_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

si riduce alla legge di Stevino:

$$p_1 = p_2 + \rho g(h_2 - h_1).$$

Legge di Stevino ed equazione di Bernoulli

Non è però corretto dire che la legge di Stevino è conseguenza dell'equazione di Bernoulli.

L'equazione di Bernoulli è stata calcolata sotto l'ipotesi che il fluido fosse in moto, in modo da calcolare il lavoro compiuto. La legge di Stevino è stata ricavata invece in un caso statico.

Esempio (1)



<https://www.youtube.com/watch?v=atLAzx-zBBE>

Esempio (1)

Supponiamo che il tetto di una casa abbia una superficie di 300 m^2 , e che su di esso il vento spiri con velocità 30 m/s . Qual è la forza impressa sul tetto? Supporre che $\rho_{\text{aria}} = 1.33 \text{ kg/m}^3$.

Attribuiamo alle quantità dei simboli:

$$S = 300 \text{ m}^2,$$

$$v = 30 \text{ m/s}.$$

Esempio (1)

Usiamo l'equazione di Bernoulli per capire come cambiano le condizioni dell'aria quando il vento l'accelera:

$$p_0 + \rho gh = p_1 + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2.$$

La differenza di pressione è

$$p_1 - p_0 = -\frac{1}{2}\rho v^2.$$

Quindi l'aria in movimento ha una pressione **minore**.

Esempio (1)

Se supponiamo che l'aria nella casa sia ferma e uguale a p_0 , allora sul tetto agiscono due forze:

1. Una forza $F_{\text{up}} = p_0 S$ diretta verso l'alto (aria dentro la casa);
2. Una forza $F_{\text{down}} = p_1 S$ diretta verso il basso (aria sopra il tetto).

La forza risultante è

$$F = -F_{\text{down}} + F_{\text{up}} = (p_0 - p_1) \times S = \frac{1}{2} \rho v^2 \times S$$

(positiva: è diretta verso l'alto).

Esempio (1)

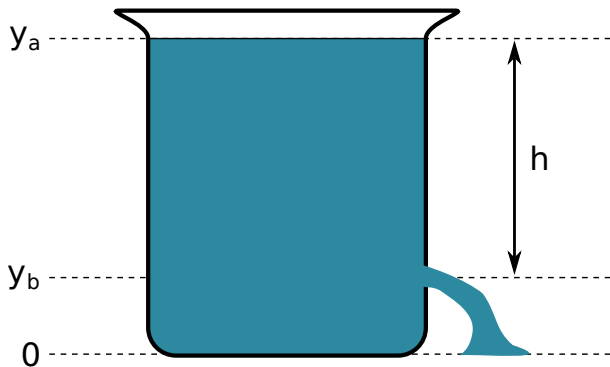
Se ora sostituiamo le quantità, otteniamo che

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \times 1.33 \text{ kg/m}^3 \times (30 \text{ m/s})^2 \times 300 \text{ m}^2 = \\ &= \frac{1}{2} \times 1.33 \text{ kg/m}^3 \times 9 \times 10^2 \text{ m}^2/\text{s}^2 \times 3 \times 10^2 \text{ m}^2 = \\ &\approx 1.8 \times 10^5 \text{ N}, \end{aligned}$$

che corrisponde al peso di una massa di 18 ton (ma diretto verso l'alto).

Esempio (2)

Un grande serbatoio d'acqua ha un foro posto a una distanza h dalla superficie superiore. Qual è la velocità dell'acqua quando esce dal foro?



Esempio (2)

Applichiamo l'equazione di Bernoulli ai punti a e b della figura:

$$p_a + \rho g y_a + \frac{1}{2} \rho v_a^2 = p_b + \rho g y_b + \frac{1}{2} \rho v_b^2.$$

Ma $v_a = 0$, e le pressioni p_a e p_b sono entrambi uguali a quella atmosferica ($p_{\text{atm}} = p_a = p_b$), quindi

$$\rho g y_a = \rho g y_b + \frac{1}{2} \rho v_b^2.$$

Esempio (2)

La soluzione è

$$v_b = \sqrt{2g(y_a - y_b)} = \sqrt{2gh}.$$

La medesima soluzione si ottiene per un corpo in caduta libera!

Esercizi

In alcuni esercizi è necessario stimare il volume occupato dal corpo umano. In che modo voi stimereste il volume occupato dal vostro corpo?

Esercizi

Due delle possibili risposte:

- ▶ Si suppone che il corpo umano sia composto solo di acqua e si usa il fatto che 1 kg di acqua occupa 1 L;
- ▶ Ci si immerge completamente in una vasca da bagno di forma regolare e si misura di quanto si alza l'acqua.

Indicativamente, una persona di 80 kg di massa occupa circa 80 L.

Esercizi

- *In un tubo di 3 cm di diametro scorre acqua alla velocità di 0.5 m/s ; il tubo termina con una strozzatura del diametro di 0.3 cm. Con che velocità passa l'acqua dalla strozzatura?*
- *Quando ci pesiamo sulla bilancia, il valore che leggiamo è minore della forza esercitata su di noi dalla gravità, a causa della spinta di Archimede. Stimare qual è la correzione da apportare per sapere il nostro peso vero.*

Esercizi

- *Un corpo ha una spinta nulla se la sua densità è uguale a quella del liquido in cui è immerso. Se la densità media di un sommozzatore di 75 kg è 0.96 kg/L , che massa di piombo bisogna aggiungergli perché abbia spinta nulla?*
- *La densità dell'acqua del Mar Morto è 1.25 kg/L . Quanto è diversa la spinta di Archimede che ricevete quando vi immergete nel Mar Morto, rispetto a quella che ricevete immergendovi in una normale piscina?*