

Scienze Biomediche e della Prevenzione Sanitaria

FISICA – Lezione 5

Roberto Guerra

`roberto.guerra@unimi.it`

Dipartimento di Fisica
Università degli studi di Milano

Part III

Lavoro ed energia

Definizione di lavoro

Il lavoro L compiuto da una forza costante F nello spostamento un corpo di una distanza Δx è

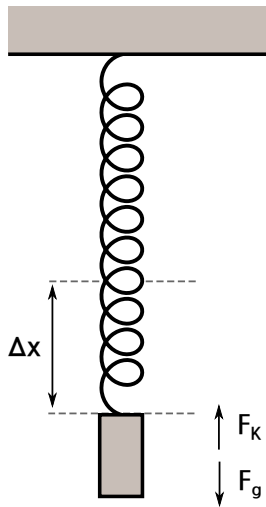
$$L = F \Delta x,$$

se la forza agisce lungo la direzione x . Se la forza è perpendicolare, il lavoro è nullo (zero).

La definizione si applica anche se F non è l'unica forza agente sul corpo. L'unità di misura del lavoro è il Joule:

$$[L] = J = m \cdot N = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2.$$

Esempio



Consideriamo il caso già visto di una molla verticale. Se a causa della gravità il corpo si sposta verso il basso di Δx , il lavoro della forza gravitazionale è

$$L_g = F_g \Delta x = -mg \Delta x,$$

con $g \simeq 10 \text{ m/s}^2$ e Δx negativo.

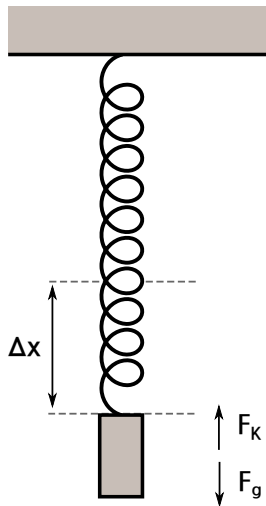
Il lavoro L_g risulta quindi *positivo*.

Il lavoro della forza di Hooke è più problematico. La formula

$$L_K = F_K \Delta x = -k(\Delta x)^2$$

è infatti **sbagliata**!

Esempio



La forza di Hooke non è costante: all'inizio dello spostamento essa è piccola ($F_K \propto \Delta x$), e cresce man mano che la molla si allunga. Quindi all'inizio dello spostamento il lavoro è minore.

Si può dimostrare che il lavoro compiuto **partendo dalla posizione di riposo** è

$$L_K = -\frac{1}{2}k(\Delta x)^2.$$

Più in generale, se ci allontaniamo dalla posizione di riposo L_K sarà negativo (perché la forza della molla è nella direzione opposta al moto), mentre se andiamo verso la posizione di riposo L_K sarà positivo.

Teorema dell'energia cinetica

Nel caso in cui la forza F sia quella totale e sia costante, l'accelerazione è anch'essa costante. Possiamo quindi usare la formula

$$v_f^2 = v_0^2 + 2a \Delta x$$

per esprimere il lavoro compiuto da F :

$$L_{\text{tot}} = F \Delta x \quad (F: \text{forza totale})$$

$$= ma \Delta x \quad (\text{v. eq. sopra})$$

$$= ma \left(\frac{v_f^2 - v_0^2}{2a} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Teorema dell'energia cinetica

Si può dimostrare che il risultato

$$L_{\text{tot}} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2.$$

vale più in generale anche se la forza F non è costante. Quindi si applica ad esempio anche al caso di una molla.

Questo è il **teorema dell'energia cinetica**.

La definizione di energia cinetica è

$$E_{\text{cinetica}} \equiv \frac{1}{2}mv^2$$

Esempio

Se sparo con velocità v un proiettile di massa m , e questo è attaccato ad una molla con costante k , quanta strada compie il proiettile?

Il lavoro totale è esclusivamente dovuto alla molla

$$\begin{aligned} L_{\text{tot}} &= \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \\ &= -\frac{1}{2}mv_0^2, \end{aligned}$$

da cui si ottiene:

$$-\frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = -\frac{1}{2}mv_0^2 \quad \rightarrow \quad \Delta x = \sqrt{\frac{m}{k}}v_0.$$

(verificate il risultato mediante una analisi dimensionale)

Forze conservative

Una forza è detta conservativa se il suo lavoro compiuto per spostare un corpo da A a B non dipende dal percorso fatto.

Per questa classe di forze valgono una serie di proprietà molto utili.
Ma quali sono le forze conservative?

Esempi di forze non conservative

Un esempio di forza *non* conservativa è la forza di attrito:

$$F_a = -\mu F_N,$$

dove F_N è la forza normale.

Supponiamo di spostare una cassa 5 m a destra.

Il lavoro compiuto da F_a è

$$L_a = -5 \text{ m } \mu F_N.$$

Esempi di forze non conservative

Supponiamo adesso di spostare la medesima cassa prima 3 m a sinistra, poi 8 m a destra. Lo spostamento complessivo è comunque di 5 m, ma ora il lavoro compiuto è

$$\begin{aligned}L_a &= (-3 \text{ m} \times \mu F_N) + (8 \text{ m} \times -\mu F_N) = \\&= -11 \text{ m} \times \mu F_N.\end{aligned}$$

Abbiamo fatto più lavoro rispetto al caso precedente, com'è ovvio: il segno del lavoro non cambia con la direzione della cassa!

*Possiamo concludere che il lavoro svolto dalle forze di attrito è sempre **negativo**.*

Esempi di forze conservative

Facciamo ora l'esempio di una forza conservativa, la forza di gravità:

$$F_g = -m g.$$

con $g \simeq 10 \text{ m/s}^2$.

Supponiamo di reggere con la mano un oggetto di massa m , e lo abbassiamo di 1 m ; il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale è

$$L_g = -1 \text{ m} \times -mg = 1 \text{ m} \times mg$$

Il lavoro risulta positivo: il corpo si muove dove la gravità vorrebbe che andasse.

Esempi di forze conservative

Supponiamo ora di sollevare il corpo di 1 m, e poi di abbassarlo di 2 m; in questo caso il lavoro di F_g è

$$\begin{aligned} L_g &= (1 \text{ m} \times -mg) + (-2 \text{ m} \times -mg) = \\ &= 1 \text{ m} \times mg, \end{aligned}$$

uguale al lavoro del caso precedente.

La forza gravitazionale è quindi una forza conservativa.



Tra le forze che abbiamo visto sinora, sono conservative:

- ▶ La forza di gravità;
- ▶ La forza di richiamo di una molla.

Una forza non conservativa è la forza di attrito.

(Come trattiamo le forze normali? Interessa sapere se sono conservative?)

Energia potenziale

Nel caso delle forze conservative si può definire una energia, detta “**potenziale**”, che dipende dalla posizione dell’oggetto.

L’energia potenziale U è definita in modo che il lavoro della forza conservativa F per spostare il corpo da A a B sia

$$L_{A \rightarrow B} = -(U_B - U_A)$$

(la convenzione dei segni sembra strana, ma tra un attimo sarà chiaro perché è così).

Energia potenziale gravitazionale

Nel caso della forza gravitazionale mg agente su una massa m , se la quota varia di Δh il lavoro di mg è

$$L = -mg \times \Delta h = -mg(h_f - h_0),$$

con $g \simeq 10 \text{ m/s}^2$, da cui, applicando la definizione

$$-(U_f - U_0) = -(mgh_f - mgh_0).$$

Quindi l'energia potenziale gravitazionale è

$$U(h) = mgh.$$

Energia potenziale di una molla

Nel caso della forza di Hooke, le cose sono più complesse perché la forza non è costante. Ma sappiamo già che, se $x_0 = 0$ è la posizione di riposo, vale

$$L_K = -\frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = -\frac{1}{2}k(x_f - 0)^2,$$

quindi

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2.$$

Teorema di conservazione dell'energia

Supponiamo ora che su un corpo agiscano solo forze conservative, con un'energia potenziale U . Allora dal teorema dell'energia cinetica vale che

$$L_{\text{tot}} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -(U_f - U_0) = U_0 - U_f,$$

da cui

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + U_f = \frac{1}{2}mv_0^2 + U_0,$$

che è detto **teorema di conservazione dell'energia**.

Teorema di conservazione dell'energia

Nell'equazione

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + U_f = \frac{1}{2}mv_0^2 + U_0,$$

le quantità che caratterizzano il sistema alla **fine** del moto sono tutte a sinistra, quelle che lo caratterizzano all'**inizio** sono a destra.

Quindi la quantità

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x),$$

detta **energia totale**, è costante durante il moto.

Applicazioni del teorema

Il teorema di conservazione dell'energia è di straordinaria importanza per la fisica, perché rende molto più semplice la soluzione di una vasta classe di problemi rispetto all'uso delle equazioni di Newton.

Vediamone alcuni esempi.

Applicazioni del teorema

Supponiamo di studiare la caduta di un corpo di massa m . Siccome la forza di gravità è conservativa, ciò vuol dire che la quantità

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

con $g \simeq 10 \text{ m/s}^2$, si conserva (ovvero resta costante) al passare del tempo.

Durante la caduta, il valore di h diminuisce. Perché E resti costante, occorre che il valore di v aumenti secondo la legge

$$v = \sqrt{2 \left(\frac{E}{m} - gh \right)}.$$

Applicazioni del teorema

Se avessimo risolto il problema usando la cinematica (moto rettilineo u. accelerato), avremmo usato la formula

$$v^2 = v_0^2 - 2g(h - h_0) = v_0^2 - 2gh + 2gh_0$$

Confrontiamo questa equazione con

$$v = \sqrt{2 \left(\frac{E}{m} - gh \right)},$$

elevando al quadrato ambi i membri della seconda.

Applicazioni del teorema

Si ottiene

$$v^2 = 2 \frac{E}{m} - 2 g h,$$

che se si pone

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 + m g h_0.$$

diventa uguale a

$$v^2 = (v_0^2 + 2 g h_0) - 2 g h$$

e ritroviamo il risultato precedente.

A vederlo, il risultato è ovvio: E è l'energia all'inizio della caduta!

Applicazioni del teorema

Questo problema sembrerebbe mostrare che non c'è alcun vantaggio nell'usare l'energia anziché le leggi della dinamica.

Ma in realtà l'energia ha un enorme vantaggio: dipendendo solo dalla posizione, l'equazione

$$v = \sqrt{2 \left(\frac{E}{m} - g h \right)}$$

può descrivere moti di caduta non solo verticali.

Applicazioni del teorema



Supponiamo ad esempio che uno sciatore scenda da un pendio senza attrito. La sua energia totale prima della discesa sarà

$$E = \frac{1}{2}m \cdot 0^2 + m g h$$

mentre nel momento in cui passa per il traguardo la velocità sarà

$$v_f = \sqrt{2 \left(\frac{E}{m} - g \cdot 0 \right)} = \sqrt{2E/m} = \sqrt{2gh}.$$

ovvero

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = m g h$$

che indica che tutta l'energia potenziale si è convertita in energia cinetica.

Esercizio svolto

Un corpo di massa m è posto su una molla verticale, e viene premuto verso il basso di una lunghezza Δh rispetto alla posizione di riposo della molla. Quando si rilascia la presa, qual è la massima altezza a cui arriva il corpo?

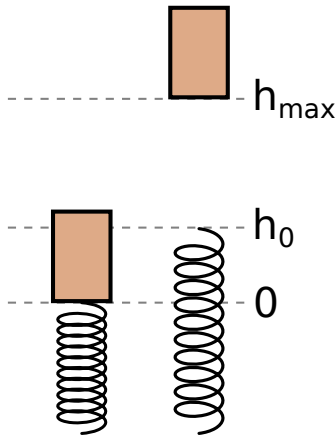
Questo tipo di esercizio riguarda solo forze conservative (forza elastica, forza di gravità), e non richiede il calcolo di tempi: si può quindi usare il principio di conservazione dell'energia.

Esercizio svolto

Non ci sono quantità numeriche in gioco, quindi passiamo subito a uno schizzo della configurazione del problema.

Le due distanze verticali in gioco sono:

- ▶ h_0 : accorciamento della molla;
- ▶ $h_{\max}$: altezza del salto.



Esercizio svolto

All'inizio del moto, quando la molla è contratta di Δh_0 e la massa m è ferma, l'energia totale è

$$E_{\text{iniziale}} = E_{\text{cin}} + E_{\text{molla}} + E_{\text{grav}} = 0 + \frac{1}{2}kh_0^2 + 0$$

(solo la molla ha energia potenziale).

Esercizio svolto

Quando la molla è scattata e la massa m è al culmine del suo volo, l'energia totale è

$$E_{\text{finale}} = E_{\text{cin}} + E_{\text{molla}} + E_{\text{grav}} = 0 + 0 + m g h_{\text{max}}.$$

Non c'è energia cinetica, perché in questo istante la massa è ferma.

(Domanda: nel momento in cui è ferma, la massa m che accelerazione ha?)

Esercizio svolto

Le due scritture dell'energia devono uguagliarsi, per il principio di conservazione dell'energia:

$$mgh_{\max} = \frac{1}{2}kh_0^2.$$

L'altezza raggiunta dalla massa m è quindi

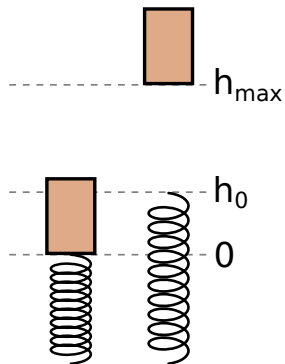
$$h_{\max} = \frac{k}{2mg}h_0^2.$$

Esercizio svolto (versione 2)

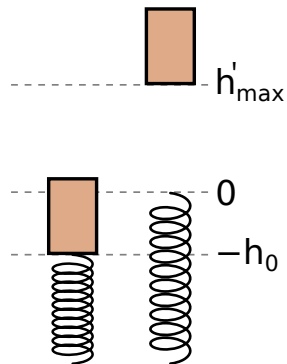
Proviamo ora a risolvere di nuovo l'esercizio, usando un diverso sistema di riferimento per misurare le altezze.

Esercizio svolto (versione 2)

Primo sistema di riferimento



Secondo sistema di riferimento



Esercizio svolto (versione 2)

All'inizio del moto,

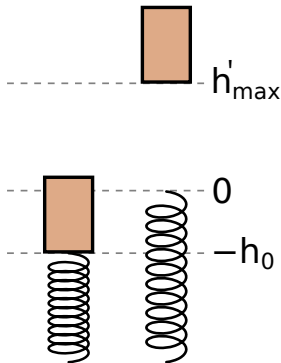
$$E = -mgh_0 + \frac{1}{2}kh_0^2,$$

mentre alla fine

$$E = mgh'_{\max},$$

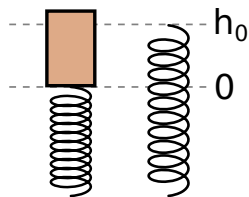
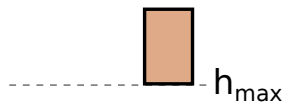
quindi la soluzione è

$$h'_{\max} = \frac{k}{2mg}h_0^2 - h_0.$$



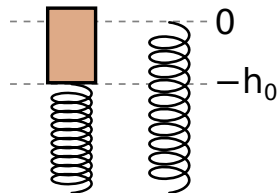
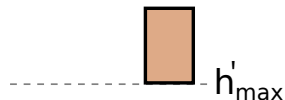
I due risultati sono consistenti?

Primo sistema di riferimento



$$h_{\max} = \frac{k}{2mg} h_0^2.$$

Secondo sistema di riferimento



$$h'_{\max} = h_{\max} - h_0.$$

Esercizi

- 1) Un proiettile viene sparato verso il basso da un'altezza di 100 m, e nella caduta aumenta la sua velocità di 72 km/h per via della forza gravitazionale (si trascuri l'attrito dell'aria). Calcolare la velocità iniziale e finale del proiettile [$v_i = 40$ m/s, $v_f = 60$ m/s].
- 2) Una sfera d'acciaio di massa $m = 8$ kg, viene sparata verso il basso con $v_i = 100$ m/s da un'altezza $h = 500$ m. Il proiettile viene fermato al livello del suolo da una molla con $k = 10^6$ N/m. Calcolare la compressione massima della molla [$\Delta z = 40$ cm].

Esercizi

3) Due sfere ($m = 1 \text{ kg}$) sono spinte una verso l'altra da due molle con $k_1 = 9 \text{ N/m}$ e $k_2 = 16 \text{ N/m}$ e con compressione iniziale $\Delta x_1 = 10 \text{ cm}$ e $\Delta x_2 = 5 \text{ cm}$. Al momento del rilascio le sfere si trovano ad una distanza $d = 20 \text{ m}$. Calcolare il punto x in cui si scontrano [$x = 12 \text{ m}$].

