Scienze Biomediche
e della Prevenzione Sanitaria
FISICA – Lezione 1

Roberto Guerra

roberto.guerra@unimi.it

Dipartimento di Fisica
Università degli studi di Milano

Programma del corso

1. Concetti di base:
   1.1 Fondamenti di matematica
   1.2 Unità di misura e percentuali
   1.3 Stime degli ordini di grandezza
   1.4 Cenni di geometria analitica
2. Cinematica e dinamica
3. Lavoro ed Energia
4. Fisica dei fluidi
5. Termodinamica

Informazioni sul corso

- Non c'è un orario di ricevimento: si concorda su appuntamento.
- Mi aspetto che ogni studente prenda attivamente appunti durante la lezione, e che non si affidi solo alle slide.
- Le slide saranno reperibili sul sito del corso.
- L'esame per tutti i moduli sarà svolto nella stessa mattina/pomeriggio, via moodle nell'aula PC del polo di Vialba.
- La parte di Fisica consiste nella risoluzione di due esercizi, e alcune domande di teoria.
- Durata: 30 minuti senza calcolatrice.
- Il voto rimane valido.

Part I

Concetti di base: fondamenti di matematica

Lista di prerequisiti

1. Proprietà delle operazioni
2. Calcolo con le frazioni
3. Potenze intere e radici quadrate
4. Notazione scientifica
5. Proprietà geometriche fondamentali delle figure piane e solide

Proprietà delle operazioni

Addizione:

$$a + b = b + a$$ commutativa

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$ associativa/dissociativa

Moltiplicazione:

$$a \times b = b \times a$$ commutativa

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$ associativa/dissociativa

Addizione/moltiplicazione:

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$ distributiva

Proprietà delle operazioni

Le proprietà delle operazioni sono utili per semplificare i calcoli.

È importante abituarsi a svolgere i calcoli semplici a mente.

Proprietà delle operazioni: esempio

Calcolare 71×50 senza usare la calcolatrice:

$$\begin{aligned} 71 \times 50 &= (70 + 1) \times 50 = \\ &= (70 \times 50) + (1 \times 50) = \\ &= (7 \times 5 \times 10 \times 10) + 50 = \\ &= (35 \times 100) + 50 = \\ &= 3500 + 50 = \\ &= 3550. \end{aligned}$$

Facendo un po' di pratica, non è difficile imparare a svolgere questi piccoli calcoli a mente.

Calcolo con le frazioni

- Massimo comune denominatore (M.C.D., “g.c.d.” in inglese)
- Minimo comune multiplo (m.c.m., “l.c.m.” in inglese)
- Operazioni algebriche con frazioni (somma, differenza, prodotto, divisione)
- Semplificazione di una frazione
- Potenze e radici quadrate di frazioni

Potenze intere e radici

- $a^b = a \times a \times \ldots \times a$ (b volte);
- $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$
- $a^b \times a^c = a^{b+c}$;
- $\frac{a^b}{a^c} = a^b \times a^{-c} = a^{b-c}$;
- $a^b \times c^b = (a \times c)^b$;
- $\frac{a^b}{c^b} = \left(\frac{a}{c}\right)^b$;
- $\left(a^b\right)^c = a^{b \times c}$;
- Se si pone $\sqrt{a} \equiv a^{1/2}$, le proprietà delle potenze si estendono anche alle radici, ad esempio,

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = \left(a^{1/2}\right)^2 = a^{\frac{1}{2} \times 2} = a.$$

Notazione scientifica

Dato un numero x, la sua rappresentazione in notazione scientifica è

$$x = \pm a \times 10^b,$$

dove $1 \leq a < 10$ è un numero reale e b è un numero intero (positivo o negativo).

Esempi:

- $36 = 3.6 \times 10^1$
- $-640 = -6.4 \times 10^2$
- $0.075 = 7.5 \times 10^{-2}$

Notazione scientifica

Il vantaggio della notazione scientifica è che rende molto più veloci i calcoli, se non si ha una calcolatrice a disposizione.

Esempio:

$$\begin{aligned}
468 \times 0.113 &= \left(4.68 \times 10^2\right) \times \left(1.13 \times 10^{-1}\right) = \\
&= 4.68 \times 1.13 \times \left(10^2 \times 10^{-1}\right) = \\
&= 4.68 \times 1.13 \times 10^1 = \\
&\approx 5 \times 1 \times 10 = \\
&= 50
\end{aligned}$$

Il risultato esatto è 52.9, ma almeno abbiamo un'idea di quello che ci aspettiamo. È importante fare a mente una stima approssimativa del risultato. In questo caso:

$$468 \times 0.113 \approx 500 \times 0.1 = 50$$

Cifre significative

Il numero di cifre significative è il numero di cifre usate per indicare un numero. È un errore grave indicare più (o meno) cifre significative di quanto sia ragionevole.

Esempi: il numero 14.3 ha 3 cifre significative(“1”, “4” e “3”). Il numero 10 ha una o due cifre significative.

Cifre significative

L'ultima cifra a destra dovrebbe essere la cifra il cui valore esatto è considerato incerto da misurare.

Lo zero è ambiguo in quei casi come il numero 10: qui si preferisce usare la notazione scientifica, che è priva di ambiguità.
Esempi:

$$1 \times 10^1 : \qquad \text{Una cifra significativa,}$$

$$1.0 \times 10^1 : \qquad \text{Due cifre significative.}$$

Cifre significative

Con un metro per sarti si possono distinguere i millimetri. Una lunghezza misurata con questo strumento può quindi essere indicata così:

$$12.3\,\mathrm{cm}, \qquad 123\,\mathrm{mm},$$

ma non certo così:

$$10\,\mathrm{cm}, \qquad 123.651\,\mathrm{mm}.$$

Propagazione dell'errore

Nelle somme e differenze, bisogna arrotondare il risultato alla stessa cifra del numero meno preciso:

$$13.214 + 234.6 + 7.0350 + 6.38 = 261.2290 \approx 261.2.$$

Nei prodotti e nei rapporti si deve arrotondare il risultato in modo che il numero totale di cifre significative sia lo stesso del numero meno preciso:

$$16.235 \times 0.217 \times 5 = 17.614975 \approx 20 (= 2 \times 10).$$

Propagazione dell'errore

Per riassumere:

- Nelle somme e differenze, si arrotonda alla posizione meno accurata.
- Nei prodotti e rapporti, si arrotonda al numero di cifre più basso.

Proprietà geometriche fondamentali delle figure piane e solide (da sapere!)

1. Concetto di *lunghezza* (l), *perimetro* (p), *superficie* (o “area”, S), *volume* (V).
2. Perimetro e superficie di alcune figure piane:
   2.1 quadrato ($p = 4l, S = l^2$);
   2.2 rettangolo ($p = 2b + 2h, S = b \times h$);
   2.3 triangolo ($p = l_1 + l_2 + l_3, S = b \times h/2$);
   2.4 cerchio ($p = 2\pi r, S = \pi r^2$).
3. Superficie e Volume di alcune figure solide:
   3.1 cubo ($S = 6l^2, V = l^3$);
   3.2 parallelepipedo ($S = 2(l_1 \times l_2 + l_2 \times l_3 + l_3 \times l_1), V = l_1 \times l_2 \times l_3$);
   3.3 sfera ($S = 4\pi r^2, V = \frac{4}{3}\pi r^3$).

Esercizi (1/3)

Svolgere i seguenti calcoli senza l'uso della calcolatrice (proprietà delle operazioni):

$$43 \times 20, \quad 68 \div 4, \quad 1200 \times 3,$$

$$1600 \div 25, \quad 360 \div 12, \quad 46 \times 39.$$

Svolgere i seguenti calcoli senza l'uso della calcolatrice (calcolo con le frazioni):

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \qquad \frac{2}{5} \times \frac{15}{7} \qquad \frac{4}{7} \div \frac{8}{21} \qquad \frac{6}{3} + \frac{3}{4}.$$

Esercizi (2/3)

Svolgere i seguenti calcoli senza l'uso della calcolatrice (potenze intere):

$$6 \times 6^2, \quad 3^5/3^3, \quad 2^2 \times 5^2,$$

$$\sqrt{200}, \quad \sqrt{1600}, \quad \sqrt{18}/\sqrt{4}.$$

Scrivere i seguenti numeri usando la notazione scientifica:

$$15.321, \quad 656874, \quad 0.00421, \quad 1000.$$

Esercizi (3/3)

Scrivere in forma estesa i seguenti numeri in notazione scientifica:

$$3.6 \times 10^2, 4.8 \times 10^{-2}, 1.7 \times 10^9, 5.1 \times 10^{-4}.$$

Eseguire i seguenti calcoli, usando la notazione scientifica:

$$153 \times 0.41, \quad 0.69/0.0023, \quad 150/2.5, \quad 0.01/200.$$

Part I

Concetti di base: unità di misura e percentuali

Unità di misura

Un’unità di misura specifica il riferimento usato per quantificare una grandezza fisica, come la lunghezza, il tempo, o la massa.

Esempi di unità di misura per tali grandezze sono il metro (lunghezza), il secondo (tempo) e il kilogrammo (massa).

Quali altre unità di misura vi vengono in mente?

Calcolo con unità di misura

Le unità di misura si rappresentano immediatamente dopo il numero a cui sono associate:

$$10\,\mathrm{m}, \qquad 3\,\mathrm{kg}, \qquad 60\,\mathrm{s}.$$

Nelle operazioni algebriche, le unità di misura si comportano esattamente come se fossero moltiplicate al numero che le precede (v. proprietà delle operazioni):

$$3\,\mathrm{s} + 4\,\mathrm{s} = (3+4)\,\mathrm{s} = 7\,\mathrm{s},$$

$$2\,\mathrm{m}^2 \times 5\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{m}^3.$$

Il Sistema Internazionale

Dimensione	**Unità di misura**
Lunghezza	m (metro)
Tempo	s (secondo)
Massa	kg (kilogrammo)
Temperatura	K (kelvin)
—	
Superficie	m^2 (metro quadro)
Volume	m^3 (metro cubo)
Energia	J (joule)
Forza	N (newton)
Velocità	m/s (metro al secondo)
Accelerazione	m/s^2 (metro al secondo quadro)

Le unità di misura più comuni (da sapere!)

Assieme alle unità di misura viste nella tabella precedente, esistono altre unità di misura più comuni:

- Litro (l), misura di volume equivalente a 1 dm^3;
- Quintale (qt), misura di massa equivalente a 100 kg;
- Tonnellata (ton), misura di massa equivalente a 1000 kg.

Multipli e sottomultipli (da sapere!)

Multiplo	**Simbolo**	**Potenza**		
Tera	T	10^{12}	=	...
Giga	G	10^{9}	=	1 000 000 000
Mega	M	10^{6}	=	1 000 000
Kilo	k	10^{3}	=	1000
Etto	h	10^{2}	=	100
Deca	da	10	=	10
Deci	d	10^{-1}	=	0.1
Centi	c	10^{-2}	=	0.01
Milli	m	10^{-3}	=	0.001
Micro	μ	10^{-6}	=	0.000 001
Nano	n	10^{-9}	=	0.000 000 001
Pico	p	10^{-12}	=	...

Altri Multipli e sottomultipli

Multiplo	**Simbolo**	**Potenza**	**Anno**
Quetta	Q	10^{30}	2022
Ronna	R	10^{27}	2022
Yotta	Y	10^{24}	1991
Zetta	Z	10^{21}	1991
Exa	E	10^{18}	1975
Peta	P	10^{15}	1975
Femto	f	10^{-15}	1964
Atto	a	10^{-18}	1964
Zepto	z	10^{-21}	1991
Yocto	y	10^{-24}	1991
Ronto	r	10^{-27}	2022
Quecto	q	10^{-30}	2022

Multipli e sottomultipli

Esempi:

$$60\,\mathrm{mm} = 6\,\mathrm{cm} = 0.6\,\mathrm{dm},$$

$$140\,\mathrm{kg} = 1.40 \times 10^5\,\mathrm{g} = 1.40 \times 10^8\,\mathrm{mg},$$

$$0.5\,\mathrm{ms} = 500\,\mu\mathrm{s}.$$

Calcolo con unità di misura

Esistono numeri a cui non sono associate unità di misura: si dicono numeri puri, e solitamente “contano” quantità discrete.

Esempi: numero di fogli su un tavolo, numero di macchine parcheggiate lungo una via, numero di atomi in un solido…

Calcolo con unità di misura

Il simbolo di percentuale (%) può essere considerato un'unità di misura. È semplice usarlo nei conti con la seguente sostituzione:

$$\% \to \frac{1}{100}. \qquad \text{(Quindi \% si usa con numeri puri).}$$

Esempio: $25\,\% = 25 \times \frac{1}{100} = 1/4$.

Per calcolare la percentuale di una quantità, basta moltiplicarla per quella percentuale. Ad esempio, il 40 % di 180 € è

$$180\,€ \times 40\,\% = 180\,€ \times 40 \times \frac{1}{100} = \frac{7200\,€}{100} = 72\,€.$$

Calcolo con unità di misura

Altro esempio: qual è il 50 % del 25 %?

Calcolo con unità di misura

$$
\begin{aligned}
25\,\% \times 50\,\% &= 25 \times \frac{1}{100} \times 50 \times \frac{1}{100} = \\
&= \frac{25 \times 50}{10^4} = \\
&= \frac{2.5 \times 10 \times 5 \times 10}{10^4} = \\
&= 2.5 \times 5 \times 10^{-2} = \\
&= 0.125\,(= 12.5\,\%).
\end{aligned}
$$

Indicare unità di misura

Una convenzione molto usata per specificare quale unità di misura si usa con una certa quantità x è la scrittura

$$[x].$$

Esempio: $[m_{\mathrm{zaino}}] = \mathrm{kg}$, $[V_{\mathrm{lattina}}] = \mathrm{mm}^3$, etc.

Negli esercizi si può trovare questa notazione per indicare in che unità di misura è richiesto il risultato.

Esercizi

- Convertire in kilogrammi: 3200 g, 800 g, 50 g, 2 ton, 2.3 ton, 0.7 ton, 5 qt;
- Convertire in grammi: 1.2 kg, 30 kg, 0.07 kg;
- Convertire in m: 800 cm, 76 cm, 2500 cm, 1600 mm, 900 mm, 20 mm;
- Convertire in centimetri: 80 mm, 750 mm, 8 mm, 5 m, 3.6 m, 1.27 m;
- Convertire in litri: 5000 ml, 600 ml, 1700 ml, 20 ml, 150 ml, 400 cm^3;
- Convertire in millilitri: 1.5 l, 30 l, 1/2 l, 1/4 l, 0.8 l, 0.05 l;
- Convertire in cm^3: 3 dm^3, 4 mm^3, 1.5 l.

Part I

Concetti di base: stime degli ordini di grandezza

Stima degli ordini di grandezza

In molte occasioni è fondamentale poter stimare rapidamente l'ordine di grandezza di una quantità.

Ad esempio, qual è la larghezza della stanza in cui ci troviamo?

Stima degli ordini di grandezza

Quantità	**Valori tipici**
Altezza di una persona	$1.5 \div 1.9\,\mathrm{m}$
Altezza di una porta	$2.0 \div 2.3\,\mathrm{m}$
Altezza del piano di un palazzo	$3.0 \div 3.5\,\mathrm{m}$
Lunghezza del passo di un adulto	$0.5 \div 1\,\mathrm{m}$
Altezza di una gru edile	$20 \div 30\,\mathrm{m}$
Tempo per percorrere a piedi 1 km	$10 \div 15\,\mathrm{min}$
Massa di un’automobile	$1\,\mathrm{ton}$
Capacità di un cucchiaino	$5\,\mathrm{ml}$
Massa di un litro di acqua	$1\,\mathrm{kg}$
Dimensioni di un globulo rosso	$10\,\mu\mathrm{m}$
Dimensioni di un virus	$10\,\mathrm{nm}$
Dimensioni di un atomo	$0.1\,\mathrm{nm}$

Esercizi

- Stimare la lunghezza e l'altezza di un autobus;
- Stimare lo spessore di un foglio di carta;
- Stimare la massa del vostro zaino (e verificatelo a casa!).

Il piano cartesiano

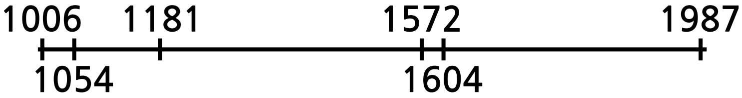
È dal medioevo (Nicola Oresme) che si è avuta l'idea di associare l'infinitezza dei numeri all'infinitezza di figure geometriche (retta, piano...).

Lo strumento oggi più usato è il piano cartesiano, così chiamato in onore del filosofo francese Descartes (Cartesio).

Il piano cartesiano

Il principio su cui si basa il piano cartesiano è semplice: si inizia con l'associare a ogni punto di una retta un numero.

Ad esempio, i punti della retta sottostante sono associati agli anni tra il 1000 d.C. e il 2000 d.C.; sono evidenziati gli anni in cui è stata osservata l'esplosione di una supernova nella Via Lattea:

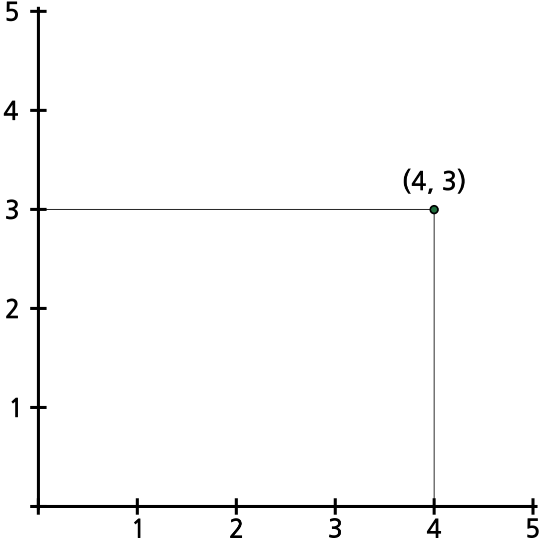


Il piano cartesiano

Il piano cartesiano è un piano geometrico su cui sono fissate due rette, perpendicolari tra loro, ciascuna delle quali è associata a una quantità: chiamiamole x e y. Ogni punto del piano è quindi associabile a una coppia di queste quantità, (x, y).

Se le due quantità x ed y sono associate (ad esempio, se x è la distanza percorsa per fare un viaggio e y è il tempo impiegato), la loro rappresentazione sul piano permette di comprenderne meglio il legame.

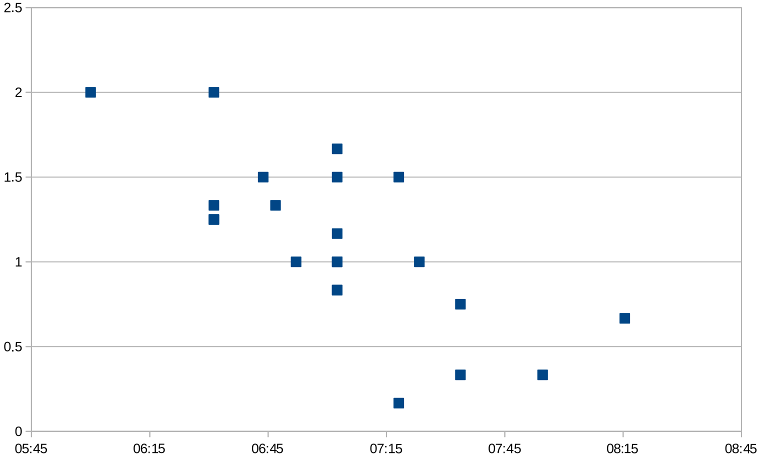
Il piano cartesiano



Esercizio in classe

Rappresentare sul piano cartesiano $t_{\mathrm{sveglia}} \times t_{\mathrm{percorso}}$ la relazione tra l'ora in cui vi siete svegliati e il tempo impiegato per arrivare a lezione.

Esercizio in classe



Programma del corso

1. Concetti di base:
   1.1 Fondamenti di matematica
   1.2 Unità di misura e percentuali
   1.3 Stime degli ordini di grandezza
   1.4 Cenni di geometria analitica
2. Cinematica e dinamica
3. Energia
4. Termodinamica
5. Fisica dei fluidi

Part I

Concetti di base: cenni di geometria analitica

La retta

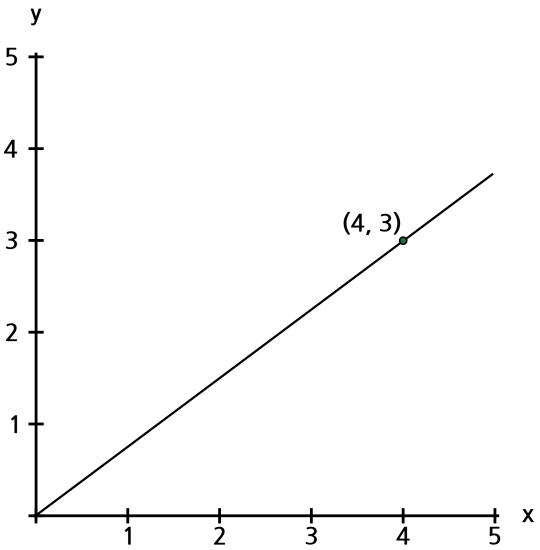
Si può stabilire una corrispondenza tra equazioni algebriche e figure del piano cartesiano. La figura in questione corrisponde all'insieme di tutti i punti (x, y) del piano per cui l'equazione algebrica è soddisfatta.

Ad esempio, l'equazione

$$3 \cdot x = 4 \cdot y$$

è associabile a una retta sul piano cartesiano.

Rappresentazione di rette



Rappresentazione di rette

Tutte le equazioni che possono essere ricondotte alla forma esplicita

$$y = a \cdot x + b,$$

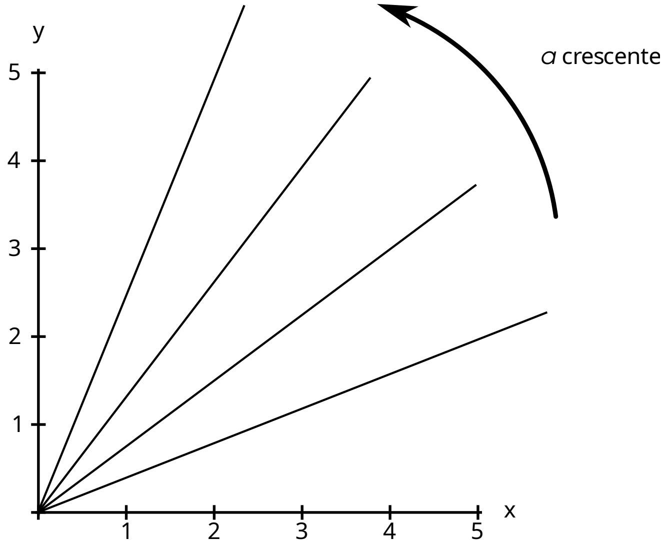
per qualche numero a e b che varia da caso a caso, sono associabili a rette. Per comodità di linguaggio, si dice che l'equazione è una retta.

Ad esempio, l'equazione precedente $3 \cdot x = 4 \cdot y$ (forma implicita) è riscrivibile come

$$y = \frac{3}{4}x,$$

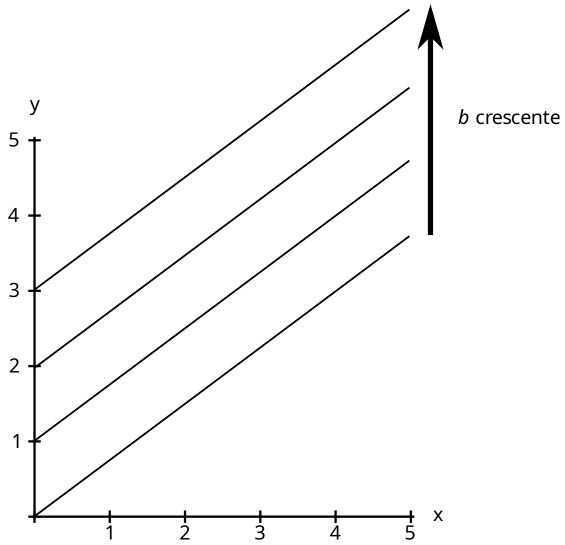
dove $a = 3/4$ e $b = 0$.

Rappresentazione di rette



Il parametro *a* è detto coefficiente angolare della retta.

Rappresentazione di rette



Il parametro *b* sposta semplicemente la retta verso l'alto o il basso.

Rappresentazione di rette

Per rappresentare una retta a partire da un'equazione, è sufficiente individuare due punti che soddisfano l'equazione: la retta passa sicuramente da essi.

Ad esempio, data l'equazione

$$y = 2x - 1,$$

la retta passerà dal punto $(x = 0, y = 2 \cdot 0 - 1 = -1)$ e dal punto $(x = 1, y = 2 \cdot 1 - 1 = 1)$.

Esercizi

Rappresentare graficamente le seguenti rette:

$$y = 3x + 1,$$

$$y = x,$$

$$2y = 4x - 2,$$

$$y = -x + 1,$$

$$y = 3.$$

Unità di misura e rette

Se nell'equazione

$$h = at + b$$

la quantità t è un tempo misurato in secondi, e la quantità h è una lunghezza misurata in metri, qual è l'unità di misura di a e b?

$\Rightarrow$ **analisi dimensionale**

Unità di misura e rette

Si può applicare l'operatore [ ] agli elementi dell'equazione

$$h = at + b,$$

tenendo conto delle seguenti proprietà:

$$[x \pm y] = [x] = [y],$$

$$[x] \pm [y] = [x] = [y],$$

$$[x\,y] = [x] \cdot [y].$$

Unità di misura e rette

Si può applicare l'operatore [ ] agli elementi dell'equazione

$$h = at + b,$$

tenendo conto delle seguenti proprietà:

$$[x \pm y] = [x] = [y],$$

$$[x] \pm [y] = [x] = [y],$$

$$[x\, y] = [x] \cdot [y].$$

Importante: queste proprietà indicano che possiamo sommare e sottrarre soltanto quantità con le stesse unità di misura!
Inoltre tutte le funzioni diverse da semplici polinomi, come $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\exp(x)$, $\log(x)$, etc, sono applicabili soltanto a numeri puri!

Unità di misura e rette

Quindi da

$$h = at + b,$$

otteniamo

$$[h] = [at + b] = [at] = [b],$$

e quindi $[h] = [b]$: allora b è una lunghezza misurata in metri.
D'altronde,

$$[h] = [at],$$

e quindi

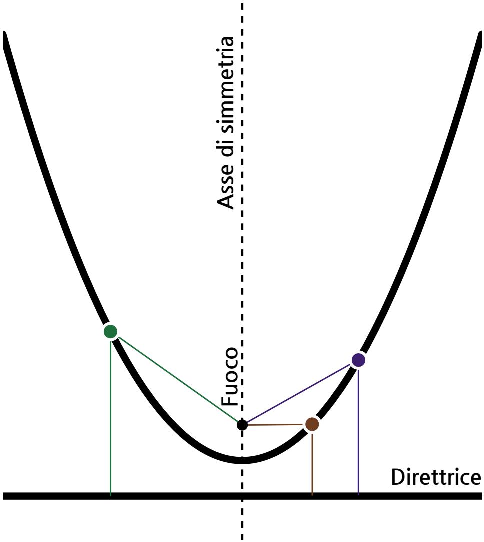
$$[h] = [a] \cdot [t] \qquad \Rightarrow \qquad [a] = \frac{[h]}{[t]}:$$

la quantità a è una velocità ($[a] = \mathrm{m/s}$).

La parabola

La parabola

Proprietà della parabola



Rappresentazione della parabola

Si può dimostrare che una parabola con asse di simmetria verticale ha equazione

$$y = ax^2 + bx + c,$$

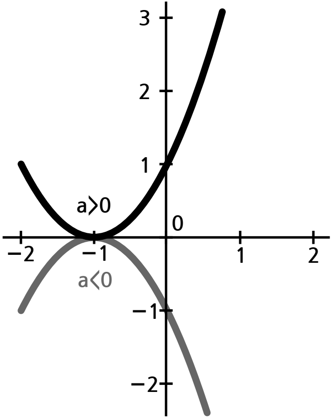
con a, b e c numeri reali.

I valori di a, b e c sono legati alla posizione del fuoco e della direttrice della parabola. Ovviamente le lettere sono arbitrarie: anche

$$h = at^2 + bt + c$$

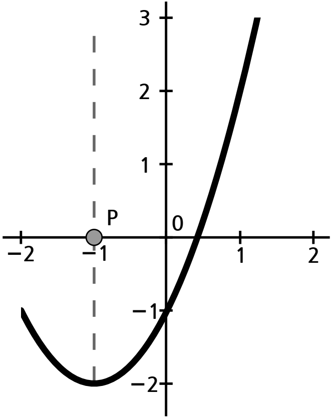
rappresenta una parabola, con t e h variabili.

Rappresentazione della parabola



Il segno del parametro a determina la concavità della parabola.

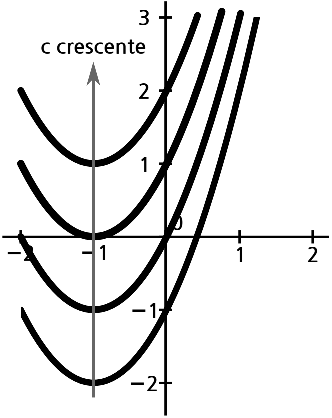
Rappresentazione della parabola



Il parametro b è legato al punto in cui l'asse di simmetria interseca l'asse x:

$$P = \left(-\frac{b}{2a}, 0\right).$$

Rappresentazione della parabola



Il parametro c determina lo spostamento verticale di tutta la parabola.

Rappresentazione della parabola

Per rappresentare analiticamente una parabola sono necessari tre punti (per la retta ne bastano due).

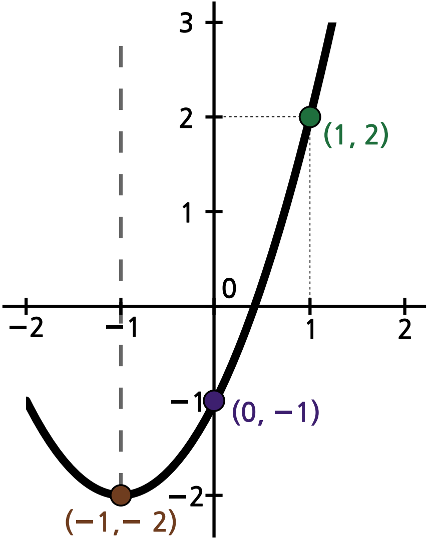
Ad esempio, considerando l'equazione

$$y = x^2 + 2x - 1,$$

si vede facilmente che essa passa per i punti

x	**y**
-1	$(-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 1 = -2$
0	$(0)^2 + 2 \cdot 0 - 1 = -1$
1	$(1)^2 + 2 \cdot 1 - 1 = 2$

Rappresentazione della parabola



Equazioni di secondo grado

Vediamo ora la connessione tra parabole ed equazioni.

Un'equazione è un uguaglianza tra due quantità dipendenti da variabili, che è vera solo per alcuni valori delle variabili; es.:

$$x + 2 = 3y^2 - 1, \qquad 3x + 1 = 5.$$

Questo è diverso da un'identità, che è sempre vera:

$$1\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{cm}, \qquad 2x - x = x.$$

Equazioni di secondo grado

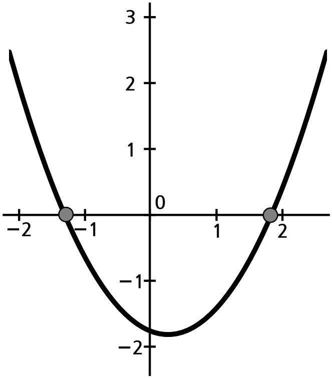
Un'equazione di secondo grado è un'equazione che può essere ricondotta alla forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

dove l'incognita è x.

La somiglianza con l'equazione della parabola è evidente.

Rappresentazione della parabola



Graficamente, la soluzione dell’equazione corrisponde alla determinazione delle coordinate x dei due punti in cui la parabola interseca l’asse delle x (dove $y = 0$).

Equazioni di secondo grado

La soluzione dell'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

si ottiene cercando di ricondursi alla forma

$$(x - \alpha)^2 = \beta,$$

perché la seconda forma è immediata:

1. Se $\beta = 0$, allora la soluzione è $x = \alpha$;
2. Se $\beta < 0$, non ci sono soluzioni;
3. Se $\beta > 0$, le soluzioni sono $x = \pm\sqrt{\beta}/\alpha$.

Equazioni di secondo grado

Trasformare

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

in

$$(x - \alpha)^2 = \beta,$$

è un buon esercizio di algebra.

È necessario ricordare la formula del quadrato del binomio:

$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab,$$

che applicata al nostro caso diventa

$$(x - \alpha)^2 = x^2 + \alpha^2 - 2\alpha x.$$

Equazioni di secondo grado

Questa è la sequenza delle operazioni:

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0, \\
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0, \\
x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} &= 0, \\
x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} &= 0, \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} &= 0, \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.
\end{aligned}
$$

Equazioni di secondo grado

Abbiamo quindi che

$$\alpha = -\frac{b}{2a}, \qquad \beta = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Le soluzioni dell'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dipendono quindi dal segno di β, ossia dal segno di

$$\Delta \equiv b^2 - 4ac.$$

Equazioni di secondo grado

A seconda del segno di Δ:

1. Se $\Delta < 0$, non esistono soluzioni;
2. Se $\Delta = 0$, allora la soluzione è unica:

$$x = -\frac{b}{2a};$$

3. Se $\Delta > 0$, allora esistono due soluzioni:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Esercizi (1/2)

Per le equazioni che corrispondono a parabole, determinare il valore di a, b e c:

$$
\begin{aligned}
0 &= 3x^2 - 2x + 1 + y, \\
x &= 2y^2 + y - 3, \\
y &= 3 + x - 2x^2, \\
y + x &= x^2, \\
y + x^2 &= x^2 - 2, \\
y &= x^2, \\
y &= (x+1)^2, \\
y^2 &= x^2.
\end{aligned}
$$

Esercizi (2/2)

Rappresentare sul piano cartesiano le seguenti parabole e trovare le intersezioni x_1 e x_2 con l'asse x:

$$y = x^2,$$

$$y = x^2 + 2x + 1,$$

$$y = x^2 + 2x - 3,$$

$$y = x^2 - x,$$

$$y = x^2 - 6x + 5.$$

Unità di misura e parabole

Se nell'equazione
$$h = at^2 + bt + c$$
la quantità t è un tempo misurato in secondi, e la quantità h è una lunghezza misurata in metri, qual è l'unità di misura di a, b e c?

Usate lo stesso ragionamento usato per la retta (e il fatto che $at^2 = a \cdot t \cdot t$) per dimostrare che

1. $[a] = \mathrm{m/s^2}$;
2. $[b] = \mathrm{m/s}$;
3. $[c] = \mathrm{m}$.